1150. 收斂空間ニ就イテ

松山　昇

集合 S ノスベテノ部分集合ノ集合 2^S ニ於テ 2^S ノ夫々ノ部分集合 A ニ他ノ部分集合 A' ヲ對應 $(A \to A')$ セシムル方法ガ與ヘラレタトキニ S ハ空間デアルト云フ。ソノタメニ最モ多ク用ヒラレルモノトシテ次ノ二ツガアル。

(I) 近傍空間. S ノ各々点 x ニ近傍ト名付ケラレル 2^S ノ集合 ∇_x ガ對應シテイル. サテ x ノ任意ノ近傍 ∇_x ニ對シテ $(\nabla_x - x) \cap A \neq \phi$ ナルトキ, 且コノトキニ限ッテ $x \in A'$ ト定義スル。

(II) 收斂空間. S ニ於テ点列ト名付ケラレル集合 $\{x_\alpha\}$ [1] ガ考ヘラレ, 更ニ $\{x_\alpha\}$ ガ x ニ收斂スルカ否カハ常ニ決定サレルモノトスル。若シ x ニ收斂スルヤウナ点列 $\{x_\alpha\}$ ヲ A ノ中カラ取リ出セルナラバ, 且ッコノトキニ限ッテ $x \in A'$ ト定義スル。

---

1) 任意ノ方向系ニ對シテ

近傍空間及ビ收斂空間デハ適當ナル條件ヲ滿スナラバ[2] 一方カラ他方ノ空間ニ移レウルモノデアッテ，例ヘバ近傍空間ガ收斂空間トナルタメニハ点列 $\{X_\alpha\}$ ノ收斂ハ次ノ(Ⅲ)ニヨッテ定義サレル。

(Ⅲ)　任意ノ ∇_x ニ對シテ $\alpha_0 = \alpha_0(\nabla_x)$ ガ定マッテ $\alpha > \alpha_0$ ナル限リ $X_\alpha \in \nabla_x$ デ且ツコノ時ニ限ッテ $\{X_\alpha\}$ ハ X ニ收斂デアルト言フ。

(Ⅲ)ト(Ⅱ)ニヨッテ我々ハ收斂空間ヲ定義スルコトハ出來ルガ，今(Ⅱ)トハ立場ヲ変ヘテ $A = A'$ ヲ對應セシメルニ，モットAニ関係シタ方法ヲ用ヒルコトニヨッテ、近傍空間 S ノ中ニ澤山ノ收斂ニヨル位相ヲ導入スルコトガ出來ルコトガ分ッタ。シカモ，ソレラ位相ノ全体ハ位相ノ強サニヨッテ順序 (*ordering*) ヲツケルトキ *Boole* 代數ニナルコトガ示サレル。

1.　2^S カラ 2^S ヘノ函數 φ，φ ハ 2^S カラ 2^S ヘノ函數トシテ次ノ條件ヲ滿スモノトスル。

(Φ.1)　任意ノ $A \in 2^S$ ニ對シテ $A \subset \varphi(A)$

(Φ.2)　$A \subset B$ ナラバ $\varphi(A) \subset \varphi(B)$

カヽル函數 φ ノ全体ノ集合ヲ Φ トスル。

定義1.　$\varphi_1 \in \Phi$，$\varphi_2 \in \Phi$ トシスベテノ $A \in 2^S$ ニ對シテ $\varphi_1(A) \subset \varphi_2(A)$ ナルトキ，且ツコノ時ニ限ッテ $\varphi_1 < \varphi_2$

---

(1) G. Birkhoff; Ann. of Math. 38 (1937)

J. W. Tukey; Convergence and uniformity in topology.

トスル。

然ルトキ容易ニ分ル如ク，$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$ ナラバ $\varphi_1 < \varphi_3$ デアリ又，$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_1$ ナラバ $\varphi_1 = \varphi_2$ デアル。更ニ φ_1, φ_2 ニ對シテ $\varphi_1 \cup \varphi_2 (A) = \varphi_1(A) \cup \varphi_2(A)$, $\varphi_1 \cap \varphi_2 (A) = \varphi_1(A) \cap \varphi_2(A)$ ト置クナラバ Φ ハ定義1ノ意味ノ順序ニ關シテ束ヲナスコトが分ル。

若シスベテノ $A \in 2^S$ ニ対シテ $\theta(A) = A$, $I(A) = S$ ナル二ツノ函數 $\theta, I (\in \Phi)$ ヲ考ヘルナラバ Φ ハ Boole 代數ニナルコトモ容易ニ証明出来ル.

2. 近傍空間. S ヲ近傍空間トシ各々ノ点 x ニ對スル近傍ノ條件ヲ次ノ様ニ置ク。

(N.1) $x \in \nabla_x$

(N.2) $U_x \cap \nabla_x$ ハ又 x ノ近傍デアル。

定義2. 点列 $\{x_\alpha\}$ ハ A ノ元ヨリナルモノトシ A^c ヲ含ム如何ナル x ノ近傍 ∇_x ニ對シテモ $\alpha_0 = \alpha_0(\nabla_x)$ が定マッテ $\alpha > \alpha_0$ ナル限リ $x_\alpha \in \nabla_x$ デアルトキ，且コノ時ニ限ッテ $\{x_\alpha\}$ ハ A ニ關シテ x ニ收斂スルト言ヒ

$$x_\alpha \longrightarrow x\ (A)$$

ト書ク。

同ジ点列 $\{x_\alpha\}$ デモ A ノ取リ方ニヨッテハ x ニ收斂スルコトモアリ，又シナイコトモアル。更ニ定義2ノ A ヲ特ニ S ニトルトキハ普通ノ收斂ノ定義Ⅲト一致スルコトニ注意スベキデアル。

補題1. $x_\alpha \longrightarrow x\ (A)$ ニシテ $\{x_\beta\} \subset \{x_\alpha\}$ が共終

系 (cofinal subsequence) デアルナラバ $x_\beta \to x(A)$ デアル。

証明ハ容易デアル。

補題2. $\{x_\alpha\} \subset B \subset A$ ニシテ $x_\alpha \to x(A)$ ナルトキハ $x_\alpha \to x(B)$ デアル。

証明. B^c ヲ含ム x ノ如何ナル近傍 $\nabla_x \in A^c$ ヲ含ム x ノ近傍デアル。従ッテ $\alpha_0 = \alpha_0(\nabla_x)$ ガ定マッテ $\alpha > \alpha_0$ ナル限リ $x_\alpha \in \nabla_x$ デアル. 即チ $x_\alpha \to x(B)$.

定義3. $\varphi \in \Phi$ トシ互ニ相異ナルAノ点カラナル点列 $\{x_\alpha\}$ ニ對シテ

$$x_\alpha \longrightarrow x\ (\varphi(A))$$

ナルトキ且コノ時ニ限ッテ $x \in A^\varphi$ ト定義スル. コノ A^φ ヲ位相 φ ニヨルAノ導來集合ト名付ケル。

コノ定義ニ於テ A^I ハ普通ノ導來集合ノ定義 (II) ト一致スル. 我々ノ以下ノ議論デ最モ興味ノアルノハ A^θ ト A^I デアル。尚ホ以下ノ議論ニ於テハ次ノ條件ヲ滿スモノトスル。

(D). 考ヘル方向系ノ全体ノ集合ヲ ϑ トシ ϑ ニ屬スル各々方向系ハ無限ニ多クノ相異ナル元ヲ含ムモノトスル。

系. $x \in A^\varphi$, $\varphi' < \varphi$ ナラバ $x \in A^{\varphi'}$ デアル。

証明。假定ニヨッテ $\{x_\alpha\} \subset A$ ガアッテ $x_\alpha \to x(\varphi(A))$ デアル. 然ルニ $\{x_\alpha\} \subset A \subset \varphi'(A) \subset \varphi(A)$ デアルカラ補題2ヲ用ヒテ, $x_\alpha \longrightarrow x\ \varphi'(A)$. 即チ $x \in A^{\varphi'}$ トナル。

コノ系ハ $\varphi' < \varphi$ ナラバ位相 φ ガ位相 φ' ヨリモ強クナイ

コトヲ示シテイル。

定理1. $(A\cup B)^\varphi \subset A^\varphi \cup B^\varphi$

証明. $x\in(A\cup B)^\varphi$ トスルト $\{x_\alpha\}\subset A\cup B$ デ $x_\alpha \longrightarrow x\,(\varphi(A\cup B))$ ナル点列 $\{x_\alpha\}$ ヲ取ルコトガ出来ル。$\{x_\alpha\}\cap A$, $\{x_\alpha\}\cap B$ ノ内少クトモ一方ハ共終系ヲナサネバナラナイ. 例ヘバ

$$\{x_\beta\} \equiv \{x_\alpha\}\cap A$$

ガ $\{x_\alpha\}$ ノ共終系デアルトスル。補題1ヨリ

$$x_\beta \longrightarrow x\ \varphi(A\cup B)$$

又 $$\{x_\beta\}\subset A \subset \varphi(A)\subset\varphi(A\cup B)$$

デアルカラ，補題2ヨリ

$$x_\beta\longrightarrow x\ \ (\varphi(A))$$

即チ $x\in A^\varphi$ トナル。

定理2. 集合 ∇ ガ x ノ近傍ナルタメノ必要且十分ナル條件ハ任意ノ $\varphi\in\Phi$ ニ對シテ

$$x\,\overline{\in}\,(\nabla^c)^\varphi$$

デアル。

証明. 定義3ノ系ニヨッテ $x\,\overline{\in}\,(\nabla^c)^\theta$ ヲ示セバヨイ。∇ ガ x ノ近傍デアルトシ且ツ $x\in(\nabla^c)^\theta$ トスル. 従ッテ適當ナル $\{x_\alpha\}\subset\nabla^c$ ガアッテ $x_\alpha\longrightarrow x\,(\nabla^c)$. デアルカラ, $\nabla^{cc}=\nabla$ ヲ含ム任意ノ x ノ近傍従ッテ特ニ ∇ ニ對シテモ $\alpha_0=\alpha_0(\nabla)$ ガ定マッテ $\alpha>\alpha_0$ ナル限リ $x_\alpha\in\nabla$ デアル。コレハ $\{x_\alpha\}\subset\nabla^c$ ニ矛盾スル。逆ニ $x\,\overline{\in}\,(\nabla^c)^\theta$ デ且 ∇ ガ x ノ近傍デナイトスル。∇ ヲ含ム x ノ如何ナル近傍 U_x ニ

對シテモ

$$\mathbb{U}_x \cap \nabla^c \neq \phi$$

依ッテ $x_u \in \mathbb{U}_x \cap \nabla^c \subset \nabla^c$ ナル点 x_u ヲ見出スコトガ出来ル。シカモ各々 x_u ハ互ニ相異ナルヤウニトレル。又近傍系ノ全体ハ $\subset$ ニ関シテ方向系ヲナシテイルカラ $\{x_u\}$ ハ点列デアル。コノ点列ノ作リ方ヨリ分ル如ク，$\{x_u\} \subset \nabla^c$ デ $x_u \to_x (\nabla^c)$ デアル。即チ $x \in (\nabla^c)^\theta$ トナッテ矛盾デアル。

コノ定理ヨリモトノ近傍空間ハθ位相ニヨル収斂空間ハ位相合同ニナルコトが分ル。

次ニ一ツノ空間 S カラ他ノ空間 S' ヘノ一意写像 F ニ對シテ点列トシテノ連續性ト近傍トシテノ連續性ニツイテ考ヘヨウ。

定理 3. 次ノ二ツノ事柄ハ同等デアル。

(a) $x \in S$ ト $A \in 2^{S'}$ ニ對シテ $x_\alpha \to x(F^{-1}(A))$ ナラバ $F(x_\alpha) \to F(x)$ (A)

(b) A^c ヲ含ム近傍 $\nabla_{F(x)}$ ニ對シテ S デ $(F^{-1}(A))^c$ ヲ含ム x ノ近傍 $\mathbb{U}_x$ ガ定マッテ $F(\mathbb{U}_x) \subset \nabla_{F(x)}$。

証明. (a)ガ成立シタトシテ如何ナル $(F^{-1}(A))^c$ ヲ含ム x ノ近傍 $\mathbb{U}_x$ ニ對シテモ $F(\mathbb{U}_x) \not\subset \nabla_{F(x)}$ デアルナラバ $x_u \in \mathbb{U}_x$ デ $F(x_u) \bar{\in} \nabla_{F(x)}$ ナル点 x_u ヲトルコトが出来ル。然ルニ $F(x_u) \in \nabla^c_{F(x)} \subset A$ デアルカラ $x_u \in F^{-1}(A)$. ナホ近傍系ノ順序ニ関シテ $\{x_u\}$ ハ点列ヲナシ $x_u \to x(F^{-1}(A))$ デアル。

依テ $F(x_\nu) \to F(x)\ (A)$. 所デ $A^c \subset \nabla_{F(x)}$ ナル故 $F(x_\nu) \in \nabla_{F(x)}$ デアルカラ $F(x_\nu) \to F(x)(A)$. トナッテ矛盾デアル。逆ニ (b) ガ成立シ, 且ツ $x_\alpha \to x\,(A)$ トシヨウ。(b) デ定マル U_x ニ對シテ $\alpha_0 = \alpha_0(U_x)$ ヲトルナラバ $\alpha > \alpha_0$ ナル限リ $x_\alpha \in U_x$ トナル。依テ $F(x_\alpha) \in \nabla_{F(x)}$ 或ハ $F(x_\alpha) \to F(x)\ (A)$.

3. *Riesz* ノ條件. コノ章デ我々ノ導來集合ニ關スル *Riesz* ノ條件ヲシラベヨウ.

定理 4. 次ノ (N.3) ガ成立スルナラバ $A \subset B$ ナルトキ $A^\varphi \subset B^\varphi$ デアル。

(N.3) U_x ヲ x ノ任意ノ近傍トスルトキ $U_x \subset \nabla$ ナル如何ナル ∇ モ亦 x ノ近傍デアル。

證明. $x \in A^\varphi$ トスルト適當ナル $\{x_\alpha\} \subset A$ ガアッテ $x_\alpha \to x\,(\varphi(A))$. 定義 3 ノ系ヨリ $\theta < \varphi$ ナル故

$$x_\alpha \to x\ (A)$$

依テ A^c ハ x ノ近傍デハナイ。(N.3) ヲ用ヒルナラバ $B^c \subset A^c$ カラ B^c ハ又 x ノ近傍デハナイ。更ニ $(\varphi(B))^c \subset B^c$ デアルカラ $(\varphi(B))^c$ モ亦 x ノ近傍デハナイ。シカモ $(\varphi(B))^c$ ヲ含ム如何ナル x ノ近傍 ∇_x ヲトッテモ必ズ B ト交ハラネバナラヌカラ

$$y_\nabla \in \overline{\nabla}_x \cap B$$

ナル点 y_∇ ヲトルコトガ出來ル。又コノ作リ方ヨリ分ル如ク $y_\nabla \to x\,(\varphi(B))$ デアルカラ $x \in B^\varphi$.

依テ $\quad A^\varphi \subset B^\varphi$

系. 位相θニ関シテハ(N.3)ハ$A \subset B$ナルトキ$A^{\theta} \subset B^{\theta}$ナルタメノ十分ナル條件デモアル。

導来集合ノ定義ヨリ明ナル如クAガ唯一点ヨリナル集合ノトキハ$A^{\varphi} = \phi$デアル。従ッテ$\mathfrak{S}$ガ(N.1)—(N.3)ノ條件ヲ満ス近傍空間デアルトキハ各々φニ関シテ導来集合ハ*Riesz*ノ三ツノ條件ヲ満スコトガ分ル。

定理5. $\mathfrak{S}$ガ近傍ニ関スル*Hausdorff*ノ分離公理ヲ満スタメノ必要十分ナル條件ハ

$$x_{\alpha} \to x(\mathfrak{S}),\ x_{\alpha} \to y(\mathfrak{S})\ ナラバ\ x = y$$

コノ定理及ビ証明ハG. *Birkhoff*ノト同様デアルガ、近傍空間トシテノ近傍ノ條件ヲ収斂ノ形デノベタモノデアル。コレニ反シテ$x_{\alpha} \to x(A)$ガ唯一ツノ収斂点ヲモッタメノ條件トシテハ、

定理6. $x_{\alpha} \to x(A),\ x_{\alpha} \to y(A)$ナルトキ$x = y$ナルタメノ必要且十分ナル條件ハ

(N.4) $x \neq y$ナルトキA^{c}ヲ含ム適當ナル近傍U_x, V_yガ存在シテ

$$(U_x \cap A) \cap (V_y \cap A) = \phi$$

ナラシメウルコトデアル。

証明. (N.4)ガ満サレナカッタトスルトA^{c}ヲ含ム如何ナルx, yノ近傍U_x, V_xニ對シテモ

$$x_{U,V} \in (U_x \cap A) \cap (V_y \cap A)$$

ナル点$x_{U,V}$ガアル。シカモ$x_{U,V} \to x(A)$デ且$x_{U,V} \to y(A)$トナルコトモ容易ニ証明出来ル。即チ矛盾デアル。逆ニ

(N.4) デ満タサレタトシテ $x_\alpha \to x\,(A)$, $x_\alpha \to y\,(A)$, $x \neq y$ トシヨウ。收斂ノ定義ヨリ A^c ヲ含ム如何ナル近傍 U_x, V_y ニ對シテモ適當ニ α_0 が定マッテ $\alpha > \alpha_0$ ナル限リ

$$x_\alpha \in (U_x \cap A) \cap (V_y \cap A)$$

デアルカラ (N.4) ニ矛盾スル.